

## РЕЦЕНЗИЯ

по дисертация за получаване на  
образователната и научна степен „доктор“

Автор на дисертацията: Димитър Славчев

Тема на дисертацията: Съставни числени методи и ска-  
лируеми блочни алгоритми

професионално направление 4.5 „Математика“

специалност „Изчислителна математика“

от проф. д-р Иван Димов Лирков

### 1. Актуалност на темата

В дисертацията са изследвани блочни методи и алгоритми за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с плътни матрици. Предмет на изследване са методи, които се основават на йерархична полусепарабелна компресия. Тези методи са използвани за решаване на елиптични и параболични задачи от областта на аномалната дифузия, описана с интегралната формулировка на дробен Лапласиан и дискретизирана по пространството с метод на крайните елементи. Смятам, че актуалността на тематиката е безспорна.

### 2. Основни цели

- Сравнителен анализ на бързодействието на блочни методи и алгоритми за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с плътни матрици.
- Сравнителен анализ на бързодействието и паралелната ефективност на софтуерни пакети, прилагащи блочна LU факторизация за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с плътни матрици.
- Анализ на бързодействието, паралелната ефективност и точност на метод за апроксимация на решението на системи линейни алгебрични уравнения базиран на йерархична полусепарабелна компресия (HSS) от софтуерния пакет STRUMPACK за системи с подходяща структура на матрицата.
- Разработване на алгоритми за пренареждане на неизвестните при задачи породени от дискретизация с метод на крайните елементи на дробна дифузия с цел подобряване на ефективността на йерархичната полусепарабелна компресия на така изчислената матрица на коравина.

- Числено решаване на елиптични и параболични задачи от областта на аномалната дифузия, описана с интегралната формулировка на дробен Лапласиан и дискретизирана по пространството с метод на крайните елементи.

### 3. Обзор на съдържанието на дисертацията

Дисертацията съдържа 140 страници, състои се от увод, 4 глави, заключение и списък на цитираната литература с 90 заглавия на български и английски. Включени са 7 таблици и 46 фигури.

В Увода са формулирани целите на дисертацията, използваната методология за осъществяването им, кратко е изложено съдържанието.

Първа глава има въвеждащ характер. В нея са описани анализирани в дисертацията блочни методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с плътни матрици, както и базови оценки на тяхната изчислителна сложност. Описани са преки методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с плътни матрици. Разгледан е пряк метод на Гаусова елиминация и базираната на него LU факторизация. Описани са йерархични методи за решаване на системи със структурирани плътни или разредени матрици. Специално внимание е отделено на йерархичната полусепарабелна (HSS) компресия на плътни матрици и нейната реализация в софтуерния пакет със свободен достъп STRUMPACK. Описани са ULV-подобната факторизация на компресираната матрица и решаването на системата с така факторизираната матрица. Разгледани са предимствата на базирания на HSS компресия метод, водещи до по-малка изчислителна сложност за задачи с подходяща структура на изходната матрица.

Втора глава е посветена на задачата за обтичането на крилни профили на Жуковски. Получената система линейни алгебрични уравнения с плътна матрица се използва за сравнителния анализ на разгледаните блочни алгоритми. Външната гранична задача за уравнението на Лаплас е представена в интегрален вид. За дискретизация на полученото интегрално уравнение е приложен метод на граничните елементи с колокация. Проведени са числени експерименти съответно върху компютърни системи с обща и разпределена памет. Направен е сравнителен анализ на бързодействието и паралелната ефективност на разгледаните високопроизводителни софтуерни пакети за решаване на системи линейни алгебрични уравнения посредством блочна LU факторизация при използване на процесори Intel Xeon и ускорители Intel Xeon Phi. Изследвана е също така ефективността върху компютърни системи с обща памет на метод базиран на йерархична полусепарабелна компресия. Резултатите са сравнени с тези на

най-ефективния софтуерен пакет използващ блочна LU факторизация.

В трета глава са изследвани методи за решаване на двумерна гранична задача за аномална дифузия. Аномалната дифузия се описва с дробен оператор на Лаплас дефиниран в интегрален вид с помощта на потенциал на Риц. За дискретизация се прилага метод на крайните елементи. Дробният Лапласиан е нелокален оператор, в резултат на което матрицата на коравина на системата от линейни алгебрични уравнения е плътна. Бързодействието на йерархичния солвър зависи силно от свойствата на извъндиагоналните блокове на матрицата. Представени са пет метода за пренареждане на неизвестните. Целта е подобряване на структурата на матрицата. Проведени са числени експерименти върху компютърни системи с обща памет. Направен е сравнителен анализ на бързодействието и точността на приблизителното решение на задачата с йерархичния метод реализиран в пакета STRUMPACK при вариране на предложените пренареждания на неизвестните. Ефективността на йерархичния солвър е анализирана в сравнение със солвъра от пакета MKL.

В четвърта глава са изследвани методи за решаване на параболична задача с двумерна аномална дифузия по пространството. За дискретизация по времето се прилага неявен метод на Ойлер с постоянна стъпка по времето и диагонална концентрация на матрицата на масата. Така задачата се свежда до решаване на поредица от системи линейни алгебрични уравнения с една и съща матрица на прехода и променящи се десни части на различните стъпки по времето. Това дава възможност факторизацията да се извърши еднократно. Показано е, че при тези предположения йерархичният метод базиран на HSS компресия има предимства в сравнение с блочната LU факторизация. Направен е сравнителен анализ на директния солвър реализиран в пакета MKL и метода използващ HSS компресия от пакета STRUMPACK. За втория метод са анализирани времената за изпълнение на отделните части от алгоритъма. Получените резултати потвърждават преимуществата на йерархичния метод при числено решаване на разглежданото дробно дифузионно параболично уравнение.

В края са приложени списъци на публикациите по темата на дисертацията и на изнесени доклади.

#### 4. Научни и научно-приложни приноси

Основните приноси в дисертацията са в областта на изследване производителността на алгоритми за решаване на линейни системи с плътни матрици.

Изследвана е производителността на алгоритми за решаване на системи, полу-

чени при дискретизация с метод на граничните елементи за гранична задача за ламинарен поток около крилни профили на Жуковски. Изследвана е изчислителната сложност, паралелната ефективност и относителната грешка на метод на йерархична полусепарабелна компресия (HSS). Сравнителният анализ включва два типа плътни матрици, които са получени при дискретизация с: а) метод на граничните елементи на гранична задача за ламинарен поток около крилни профили на Жуковски; б) метод на крайните елементи за двумерна дробно дифузионна гранична задача. Направен е сравнителен анализ на солвърите от пакетите MKL и STRUMPACK. Получена е характеристика в зависимост от прага на относителна грешка при HSS компресията на случаите, в които йерархичният метод има по-добро бързодействие. Показано е, че за задачата за обтичане на профили на Жуковски при дискретизация по метода на граничните елементи, последователната номерация на възлите по границата на профилите води до матрица с подходяща за HSS компресия структура. Това не е така за дробно дифузионната гранична задача, дискретизирана с метод на крайните елементи. С цел подобряване на ефективността на йерархичната полусепарабелна компресия са предложени и изследвани пет метода за пренареждане на неизвестните. За три от тях са разработени собствени алгоритми и програмни реализации. Сравнителният анализ показва съществено подобрение на резултатите при прилагане методите на вложените сечения и на рекурсивната бисекция. Разработен е метод, алгоритъм и програмна реализация за числено решаване на параболично уравнение с дробно дифузионен оператор по пространството. Доказано е, че за тази нестационарна задача, изчислителната сложност на отделните части на алгоритъма създава условия за предимство на йерархичния метод на базата на HSS компресия. За всички размерности на дискретната задача по пространството, както и при всички варианти на праг на относителна грешка, вариантът на програмата използваща солвъра от пакета STRUMPACK има по-добро бързодействие от този използващ MKL.

#### 5. Публикации по темата на дисертацията

Включени са 7 публикации в издания с импакт-ранг, от които 6 са публикувани и 1 е приета за печат.

#### 6. Автореферат

Авторефератът пълно и точно отразяват съдържанието на дисертацията и основните приноси, представени за защита.

#### 7. Критични бележки

Изложението е ясно и много добре илюстрирано с конкретни примери. Нямам съществени критични бележки към дисертацията. Моето мнение е, че методът на Гаус е прекалено подробно обяснен в първа глава, освен това има грешни индекси на стр. 23, 28, 32, има неточност във формулите на стр. 33. На Фиг. 2.20 не е ясно какво означава  $t_q$ . Също така не разбирам какво означава относителна грешка 6,74 в Таблица 3.1 и 8,9 в Таблица 3.2, очаквах да има някакво обяснение защо грешката е голяма. Тези забележки в никакъв случай не омаловажават получените от Димитър Славчев резултати, които представляват оригинални приноси в областта на изследване производителността на алгоритми за решаване на линейни системи с плътни матрици.

#### 8. Заключение

Като имам предвид актуалността на тематиката и значимостта на научните приноси, считам, че дисертацията напълно удовлетворява изискванията на ЗРАС-РБ, ППЗРАСРБ, както и изискванията в правилниците на БАН и ИИКТ-БАН.

Предлагам на Димитър Славчев да бъде дадена

*образователната и научна степен „Доктор“*

в професионално направление 4.5 „Математика“, специалност „Изчислителна математика“.

28 март 2022 г.  
София

Ре

На основание

ЗЗЛД